

10.6. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

Események – megoldások

2731 *a)* Igen, igen, nem, igen.
b) és *c)* {gól; nem gól}, {kosár jó; kosár nem jó}, –, cserepek száma.

2732 *a)* {1, 2, 3, …, 19, 20}; *b)* {0, 1, 2};
c) {–20, –19, …, –1, 1, …, 19, 20}.

2733 *a)* Igen. *b)* $8 \le x \le 13$
c) Rudi jó: $\{9{,}5 \le x \le 10{,}5\}$; rudi nem jó: $\{x < 9{,}5$ vagy $10{,}5 < x\}$; 10 cm-nél rövidebb: $\{x < 10\}$.

2734 *a)* {1, 2, 3, …, 29};
b) A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {20, 21, 22, …, 29}, C = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}.
c) A = {6, 7, 8, …, 29} = {legalább 6.-ra húzunk királyt};
B = {1, 2, 3, …, 19} = {legfeljebb 19.-re húzunk királyt};
C = {1, 4, 6, …, 28} = {elsőre vagy összetett sorszámra húzunk királyt}.
d) Biztos esemény például: {legfeljebb 32.-re húzunk királyt}.
Lehetetlen esemény például: {29.-re sem húzunk királyt}.

2735 *a)* {3, 4, 5, …, 18}.
b) Biztos esemény: {pozitív összeget dobunk}. Lehetetlen esemény: {20-nál többet dobunk}.

2736 *a)* {piros, zöld, fehér}.
b) {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; p); (z; f); (f; p); (f; z)}.
c) {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; f)}.
d) {(p; p; p); (p; p; z); (p; p; f); (p; z; z); (p; z; f); (z; z; f)}.
e) {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; p); (z; f); (f; p); (f; z); (f; f)}.

2737 *a)* A lehetséges kimenetelek táblázata:
b) 3-3-3.

Zsolt \ Jenő	Kő	Papír	Olló
Kő	*D*	*J*	*Zs*
Papír	*Zs*	*D*	*J*
Olló	*J*	*Zs*	*D*

2738 *a)* A lehetséges kimenetelek táblázata:
b) 30.
c) Mindkettőt ugyanannyi elemi esemény valósítja meg.

T \ P	1	2	3	4	5	6
1	–	*P*	*P*	*P*	*P*	*P*
2	*T*	–	*P*	*P*	*P*	*P*
3	*T*	*T*	–	*P*	*P*	*P*
4	*T*	*T*	*T*	–	*P*	*P*
5	*T*	*T*	*T*	*T*	–	*P*
6	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	–

Műveletek eseményekkel – megoldások

2739 *a)* $\overline{A}$ = {nincs fej}; $\overline{B}$ = {van fej}; $\overline{C}$ = {0, 1 vagy 3 fej}; $\overline{D}$ = lehetetlen.

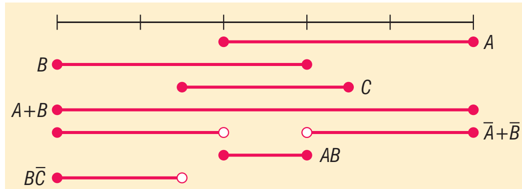
b) Nem.

c) Igen, {mind írás} és {pontosan kettő fej}.

2740 *a)* és *b)*-nél az eseményeket az ábrán láthatjuk:

c) $A + B$ biztos, $\overline{A}\cdot\overline{B}$, $A\cdot B\cdot\overline{C}$ lehetetlen.

d) Például A és $B\cdot\overline{C}$, illetve $A + B$ és $\overline{A}\cdot\overline{B}$.



2741 *a)* $3!\cdot 2 = 12$, illetve $3!\cdot 3! = 36$. *b)* Igaz. *c)* $3!\cdot 2\cdot 2 = 24$.

2742 *a)* Az események szövegesen:

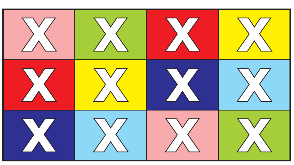
$A + B$ = {tököt vagy tízest vagy ászt húzunk};
$A\cdot B$ = {tök tízest vagy tök ászt húzunk};
$B\cdot C$ = {ászt húzunk};
$A + C$ = {tököt vagy figurás lapot húzunk};
$\overline{C}\cdot A$ = {számozott tök lapot húzunk};
$A\cdot B\cdot C$ = {tök ászt húzunk}.

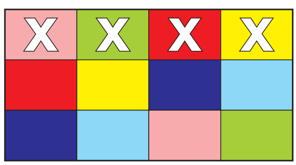
b) $|A| = 8$, $|B| = 8$, $|C| = 16$;
$|A + B| = 14$, $|A\cdot B| = 2$, $|B\cdot C| = 4$, $|A + C| = 20$, $|\overline{C}\cdot A| = 4$, $|A\cdot B\cdot C| = 1$.

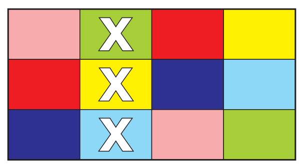
2743 *a)* $E = \overline{A}$; $F = \overline{B + D}$; $G = \overline{A + C}\cdot B$; $H = C\cdot\overline{D}$.

b) Igen, a következő párok: A és C, E, G vagy H; B és D vagy F; C és G; D és F, G vagy H; F és G.

2744 *a)* $A + B$; $A\cdot\overline{B}$; $\overline{C}\cdot\overline{E}$.







b) $F = A\cdot B$; $G = E\cdot\overline{D}$; $H = (E + D)\cdot\overline{E\cdot D}$.

c) $A\cdot B\cdot C$; $\overline{A}\cdot D$; $\overline{B}\cdot(C + E\cdot D) + A\cdot B\cdot(E + D)\cdot\overline{E\cdot D} + \overline{A}\cdot(C + E\cdot D)$.

2745 *a)* $(A\cdot B)\setminus C = (A\cdot B)\cdot\overline{C}$;

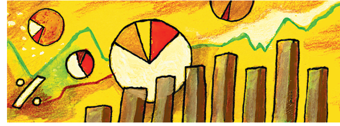
b) $A + B + C$;

c) $\overline{A + B + C} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$;

d) $(A\cdot B) + (B\cdot C) + (A\cdot C)$;

e) $(A + C)\setminus B = (A + C)\cdot\overline{B}$;

f) $(\overline{A} + \overline{B})\cdot(\overline{A} + \overline{C})\cdot(\overline{B} + \overline{C}) = \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}$.



2746 *a)* A megjelölt körívek a bal oldali ábrán láthatók.

b) $A + B + C = \{12; 5; 20; 1; 18; 4; 13; 6; 10; 15; 2\}$ (sárga körcikk a jobb oldali ábrán);

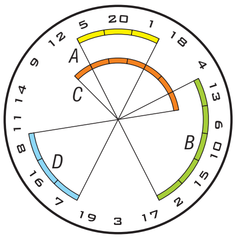
$C \cdot \overline{A + B} = \{12; 18; 4\}$ (narancssárga körcikk a jobb oldali ábrán);

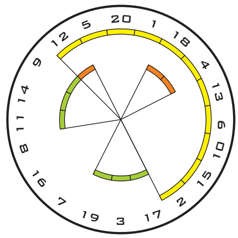
$B \cdot \overline{D} = B$;

$\overline{A + B + C + D} = \{17; 3; 19; 11; 14; 9\}$ (zöld körcikk a jobb oldali ábrán).

c) Bármely kettő, kivéve az A és C párt.

d) A bekövetkezése maga után vonja C bekövetkezését.





Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség – megoldások

2747 –

2748 *a)* Géza: $\frac{12}{23} \approx 0,52$; Tamás: $\frac{7}{19} \approx 0,37$; Ferenc: $\frac{13}{22} \approx 0,59$.

b) Ferencre kell bízni a szabadrúgások elvégzését.

2749 *a)* Piros: $\frac{12}{40} = 0,3$; kék: $\frac{8}{40} = 0,2$; sárga: $\frac{20}{40} = 0,5$.

b) Piros: 30 db $(100 \cdot 0,3 = 30)$; kék: 20 db $(100 \cdot 0,2 = 20)$; sárga: 50 db $(100 \cdot 0,5 = 50)$.

2750 –

2751 Legfeljebb 11.

2752 Legalább négy.

2753 –

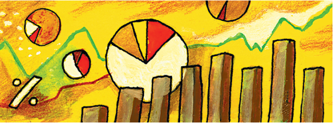
2754 –

A valószínűség klasszikus modellje – megoldások

2755 $\frac{1}{6} = 0,1\dot{6}$.

2756 $\frac{2}{16} = 0,125$.

2757 $\frac{24}{30} = 0,8$.



2758 *a)* $\frac{3}{7} \approx 0{,}43.$ *b)* $\frac{2}{7} \approx 0{,}29.$

2759 $\frac{10}{90} = 0{,}\dot{1}.$

2760 $1 - 0{,}6 = 0{,}4.$

2761 $1 - \frac{7}{30} = 0{,}7\dot{6}.$

2762 $1 - \frac{7+9}{40} = 0{,}6.$

2763 $\frac{14}{50} = 0{,}28.$

2764 $\frac{6}{25} = 0{,}24.$

2765 $\frac{x}{15} = 0{,}8;\ x = 12.$

2766 $\frac{4}{x} = 0{,}2;\ x = 20.$

2767 $\frac{x}{x+12} = 0{,}6;\ x = 18.$

2768 $1 - \frac{20}{20+x} = 0{,}2;\ x = 5.$

2769 $\frac{80^\circ}{360^\circ} = 0{,}\dot{2}.$

2770 *a)* $\frac{1}{10} = 0{,}1;$ *b)* $\frac{1}{10} = 0{,}1;$ *c)* $3 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}3.$

2771 $\frac{11}{37} = 0{,}\dot{2}9\dot{7}.$

2772 Például: {1; 2; 3; 4} vagy {nem összetett szám dobása}.

2773 *a)* $\frac{120}{150} = 0{,}8.$ *b)* Hetente egyszer.

2774 *a)* Nem.

b) 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 21.

c) $\frac{4}{21} \approx 0{,}19.$

d) $\frac{11}{21} \approx 0{,}524.$

2775 *a)* $\frac{8}{8^8} \approx 0{,}000000476;$ *b)* $\frac{2}{8^8} \approx 0{,}000000119.$

2776 *a)* $\frac{1}{5!} \approx 0{,}0083;$ *b)* $\frac{2}{5!} \approx 0{,}0167.$

2777 *a)* $\frac{6 \cdot 6 \cdot 3}{6^3} = 0{,}5;$ *b)* $\frac{6+6+2 \cdot 6 \cdot 6}{6^3} \approx 0{,}389;$ *c)* $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \approx 0{,}556.$

2778 *a)* $\frac{11}{100} = 0{,}11;$ *b)* $\frac{11-5}{100-16} \approx 0{,}071;$ *c)* $\frac{19}{100} = 0{,}19.$

2779 *a)* $\frac{6}{6^2} \approx 0{,}167;$ *b)* $\frac{9+9+9}{6^2} = 0{,}75;$ *c)* $\frac{6}{6^2} \approx 0{,}167;$

d) $\frac{20}{6^2} = 0{,}\dot{5}.$

2780 $\frac{8}{20} = 0{,}4.$

2781 Érdemes áttérnünk a komplementer eseményre, hiszen az a csupa írás (1 eset). Az összes események száma 2^3, így:

$$P = \frac{8-1}{2^3} = 0{,}875.$$

2782 *a)* Feltehetjük, hogy egyetlen Kis Misi jár ebbe az osztályba:

$$P = \frac{1}{30} \approx 0{,}033.$$

b) A 30 tanulónak pontosan a fele szerepel a kinyitott napló jobb oldalán:

$$P = \frac{15}{30} = 0{,}5.$$

c) Az első 10 tanuló között:

$$P = \frac{10}{30} \approx 0{,}333.$$

Megjegyzés: Kis Misi esetében (és a többiben is) gondolkodhatunk úgy is, hogy 15 oldalpárnál nyílhat ki a napló, majd az ott levő két tanuló közül választ a tanár. Vagyis:

$$P = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2}.$$

2783 *a)* Ha felcsapjuk a könyvet, egyszerre mindig két oldalt látunk. Azaz csak 180 lehetőség marad, hogy valahol kinyissuk, ebből 9 fő fejezethatár:

$$P = \frac{9}{180} = 0{,}05.$$

b) A 9 fő fejezet és a $9 \cdot 5 = 45$ szakaszhatár együtt 54 oldalt foglal el:

$$P = \frac{54}{180} = 0{,}3.$$

2784 *a)* A keresett valószínűség:

$$P = \frac{1}{24} \approx 0{,}04167.$$

b) A kedvező esetek száma 1, az összes esetek száma $24 \cdot 24$, így:

$$P = \frac{1}{24^2} \approx 0{,}0017361.$$

c) A kedvező esetek száma itt 3!, az összes eseteké pedig $24 \cdot 24 \cdot 24$:

$$P = \frac{3!}{24^3} \approx 0{,}000434.$$

2785 *a)* Minden színből 8-8 darab van a csomagban. Ha nem tesszük vissza a lapokat, akkor minden húzás után a még húzható lapok száma eggyel csökken:

$$P = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \approx 0{,}004746.$$

b) Figyeljük meg, hogy a számlálót nem befolyásolja a visszatevés, azonban a nevező már nem csökken. Azaz a valószínűség kevesebb lesz, méghozzá $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{32 \cdot 32 \cdot 32}$-szeresével:

$$P = \frac{8^4}{32^4} = 0{,}00390625.$$

2786 *a)* 3 és 2 egyforma dolgot $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$-féleképpen tehetünk sorba. Mindannyiszor $8 \cdot 7 \cdot 6$-féleképpen húzhatunk pirosat a pirosak, $8 \cdot 7$-féleképpen tököt a tökök közül.
Az összes esetek száma $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28$, így:

$$P = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} \approx 0{,}00779.$$

b) Az első szorzótényező, a sorba rakások lehetősége nem változik. A többi igen, mivel nem csökken az egyes lehetőségek száma sem a kedvező, sem az összes esetek között:

$$P = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 8^3 \cdot 8^2}{32^5} \approx 0{,}009766.$$

2787 *a)* Mivel a bástya csak a sorában és az oszlopában üt, ha az egyik oszlopban valamelyik mezőre elhelyezünk egy bástyát, akkor abban a sorban más bástya nem lehet. Így az első oszlopban 8, a másodikban már csak 7, aztán 6 stb. lehetőségünk van a bástyák elhelyezésére. A kedvező esetek száma 8!. Az összes eset száma 8^8, ekkor ugyanis egymás mellé is tehetjük a figurákat, minden oszlopban nyolc helyre:

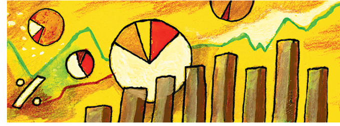
$$P = \frac{8!}{8^8} \approx 0{,}0024.$$

b) Ebben a részkérdésben az összes esetek száma megegyezik az előző példa kedvező eseteivel (nem ütik egymást), azaz 8!.

A kedvező esetek összeszámlálásához két dolgot kell észrevennünk: egyrészt minden sorban két átlómező található, egy világos és egy sötét (például az első és utolsó sorban a két szélső, a negyedik és ötödik sorban pedig a középső négyes); másrészt ezek a mezők szimmetrikusan helyezkednek el. Felülről indulva szabadon választhatunk az átlómezők közül az első négy sorban, azonban utána már a szimmetria miatt csak egy-egy szabad lehetőségünk van minden sorban. Vagyis a kedvező esetek száma 2^4, így:

$$P = \frac{2^4}{8!} \approx 0{,}000397.$$

Megjegyzés: Mindkét részben a sorok és oszlopok szerepe felcserélhető.



2788 *a)* Az öt szám hatféleképpen egyezhet meg (kedvező esetek). Az összes esetekhez bármelyik kockával dobhatunk 6-félét: 6^5,

$$P = \frac{6}{6^5} \approx 0{,}00077.$$

b) Kis pókernél az egy különböző 5-féle kockára jöhet (megkülönböztetve a kockákat). A különböző kocka 5-féle számot mutathat. A többi négy 6-féleképpen lehet egyforma. A kedvező esetek száma így $5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$, ebből:

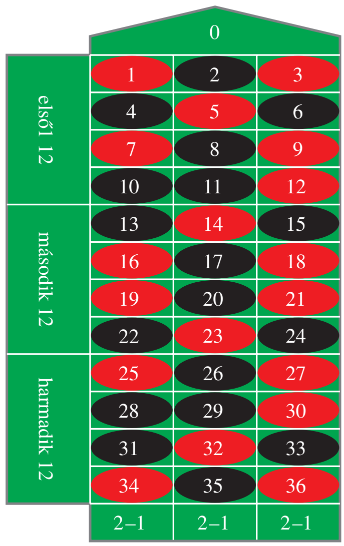
$$P = \frac{150}{6^5} \approx 0{,}0193.$$

2789 *a)* A kis sor valószínűsége:

$$P = \frac{5!}{6^5} = 0{,}0154.$$

b) A két valószínűség egyenlő.

2790 *a)* A rulettasztal számtáblázata az ábrán látható.



b) Minden sorban 3 szám áll:

$$P = \frac{3}{37} \approx 0{,}081.$$

(A 0 nem tartozik a sorok közé.)

c) Egy-egy oszlopban 12 szám áll:

$$P = \frac{12}{37} \approx 0{,}324.$$

(A 0 nem tartozik hozzá egy oszlophoz sem.) Az első tucatban ismét csak 12 szám van, így annak valószínűsége ugyanekkora.

d) Két szomszédos oszlopban 24 darab szám található, így:

$$P = \frac{24}{37} \approx 0{,}648.$$

Tehát 30 játékból kb. 20-szor nyerünk. (Ez azt jelenti, hogy kicsit ritkábban, mint három pörgetésenként kétszer nyerünk a fogadással – legalábbis ez *várható*.)

2791 *a)* $P = \frac{1}{37} \approx 0{,}027$; *b)* $P = \frac{2}{37} \approx 0{,}054$; *c)* $P = \frac{n}{37} \approx n \cdot 0{,}027$.

d) 18 darab piros színű és 18 darab páratlan van a számok között, esélyük így ugyanakkora:

$$P = \frac{18}{37} \approx 0{,}486.$$

2792 *a)* Mivel az összes esetek száma hat, ezért a valószínűségeik alapján A és B is 3-3 elemi eseményt kell, hogy tartalmazzon, szorzatuk (metszetük) pedig 2-t. Például: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$, $A \cdot B = \{2; 3\}$.

b) A most is 3 elemi eseményből áll, B azonban kettőből, összegük (egyesítésük) négyből. Például: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4\}$, $A + B = \{1; 2; 3; 4\}$.

2793 Nem ismerjük a pontos darabszámokat, legyen például a jó csokikból n darab. Ekkor $0{,}25n$ lejárt szavatosságú van. A keresett valószínűség:

$$P = \frac{n}{n + 0{,}25n} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8.$$

Megjegyzés: Tökéletes megoldás, ha a feladat elején választunk egy „kellemes” darabszámot a jó csokiknak, például 100-at. Ekkor 25 darab lejárt szavatosságú csoki volt a dobozban:

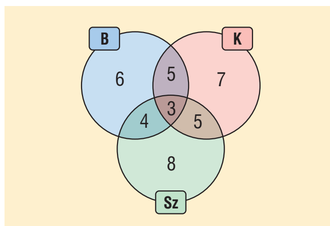
$$P = \frac{100}{125} = 0{,}8.$$

2794 *a)* Ha csak egy irányban közlekedik, akkor a 9 vagy a –9 pontba juthat el. Ha 8 egységet lép az egyik, és egyet a másik irányba, akkor a 7 vagy a –7 pontba jut. És így tovább: láthatjuk, hogy csak a páratlan számoknál fejezheti be kilenc perces sétáját.

b) Számoljuk össze a rendelkezésre álló kilenc perc alatt bejárható, összes és kedvező útvonalak számát. Mivel minden percben két irányban közlekedhet egy egységet, a kilenc perc alatt összesen 2^9 lehetősége van a katicának mozogni. Az 5-ös pontban akkor fejezi be a sétát, ha öt percig a pozitív irányba halad, a maradék négy percben pedig kétszer előre, kétszer hátra mozog. Hogy mikor teszi meg ezeket a mozgásokat a kilenc perc alatt, az nem érdekes. Ha + és – jelekkel jelöljük az egyes lépéseket, akkor összesen hét + és kettő – jelet kell leírnunk minden kilenc jelből álló sorozatban. Például: +, –, +, +, +, +, –, +, +. Ezek száma $\frac{9!}{7!\cdot 2!}$, így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}{2^9} \approx 0{,}07.$$

2795 Mielőtt a konkrét kérdésekre válaszolnánk, ábrázoljuk Venn-diagrammal a gyümölcsimádókat. Szokás szerint haladhatunk belülről kifelé:



a) $P = \frac{8}{38} \approx 0{,}21;$ *b)* $P = \frac{8+7+6}{38} \approx 0{,}55;$

c) $P = \frac{38-3}{38} = \frac{6+5+7+5+8+4}{38} = 1 - \frac{3}{38} \approx 0{,}89.$

Megjegyzések: Nem érdemes logikai szitát használnunk, hiszen legfeljebb arra jövünk rá, hogy nincs olyan tanuló, aki ne szeretné legalább az egyik gyümölcsöt. A *c)* részkérdésnél áttérhetünk a komplementerre is. Így nincs szükség a Venn-diagramra, a szöveg tartalmazza a hármas metszet elemszámát.

Valószínűségek számításánál a komplementer eseményre való áttéréskor két dolgot is tehetünk: felírhatjuk az összes eseményből kivont ellentett eseményt; vagy kivonjuk a biztos esemény valószínűségéből (1-ből) a komplementer valószínűségét.

2796 *a)* Minden színből 8 van a csomagban. Ha visszatevés nélkül húzunk, akkor minden húzás után eggyel csökken a csomag elemszáma, és vele együtt az egyes színek száma is. Ne feledjük, még a 3, 2, 2 azonos színű lapok lehetséges sorrendjeit is figyelembe kell vennünk. A megoldás:

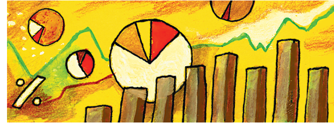
$$P = \frac{\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 8\cdot 7\cdot 8\cdot 7}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26} \approx 0{,}013.$$

b) Ha a kivett lapokat visszatesszük, akkor az új húzásnál nem csökken a választási lehetőségek száma:

$$P = \frac{\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 8^3\cdot 8^2\cdot 8^2}{32^7} \approx 0{,}0128.$$

Megjegyzés: Az *a)* részfeladatban a csökkenő szorzatokat felírhattuk volna például a következő formában is:

$$\frac{32!}{(32-7)!}.$$



2797 *a)* Kombinatorikából ismert a feladat: tegyünk sorba több dolgot, melyek között azonosak is vannak (az előző példában is alkalmaznunk kellett). A megoldás:

$$\frac{14!}{8! \cdot 4! \cdot 2!} = 45\,045.$$

b) A feladat által megadott pillanatban az összes esetek száma 8, a kedvező (rózsaszín) esetek száma 2, így:

$$P = \frac{2}{8} = 0{,}25.$$

c) Két megoldást is adunk. A bonyolultabb szerint, ha csak egy lilát nem vettünk ki eddig, akkor a kivett 13 golyót $\frac{13!}{8! \cdot 3! \cdot 2!}$-féleképp tehetjük sorba. Az egyes színekből 8!, 4!, 2!-féleképp húzhatunk golyókat. A nevezőben gyakorlatilag 14! szerepel – a végére elvileg nem írhatjuk oda az egyest (ahogy a 4! végére sem), de értékét ez nem befolyásolja:

$$P = \frac{\frac{13!}{8! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 8! \cdot 4! \cdot 2!}{14!} \approx 0{,}286.$$

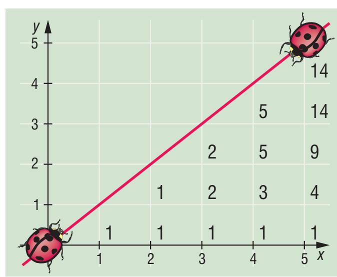
Az egyszerűbb megoldás csak az utolsó golyóra koncentrál: a 14 golyó között 4 lila van, így az utolsó $P = \frac{4}{14} \approx 0{,}286$ valószínűséggel lesz lila. Természetesen megfelelő egyszerűsítések után a bonyolultabból is megkapjuk az egyszerűbbet.

d) A három szín 3!-féleképp követheti egymást, azokon belül a szokásos 8!, 4!, 2!-féleképp következhetnek az egyes golyók. Az összes esetek száma 14!, így:

$$P = \frac{3! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 2!}{14!} = 0{,}000\,133.$$

2798 *a)* Bármerre megy, 5-ször kell felfelé, és 5-ször jobbra lépnie. Összesen 10 lépés, ami 10 perc.

b) Össze kell számolnunk az összes lehetséges útvonalat. Ezt megtehetjük úgy, hogy a lehetséges 5 jobbra és 5 felfelé lépés összes sorrendjét összeszámoljuk: $\frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$ Ez azonban nem ad útmutatást a kérdezett $y = x$ egyenes alatt haladó esetekre.



Az biztos, hogy a járkálás első (és utolsó) néhány lépése meghatározott: az origóból csak (1; 0)-n, majd (2; 0)-n át vezet az út, ugyanis nem érinthetjük az $y = x$ egyenest. Jegyezzük fel magunknak a pontok mellé, hányféleképpen juthattunk el odáig. Így az x tengely minden pontjához 1-est kell írni. A (3; 1)-hez viszont már 2-t, hiszen (3; 0)-n és (2; 1)-n át is odajuthatunk, azokba a pontokba viszont csak 1-1 útvonalon. Azaz minden pontban összeadhatjuk a hozzájuk vezető pontok útvonalait. Így már ki is tudjuk tölteni az ábrát. A kérdéses útvonalak száma 14. Ellenőrzésképpen írjuk fel az előbb kiszámolt összes eseteket is. Újra 252-t kapunk. Így a keresett valószínűség:

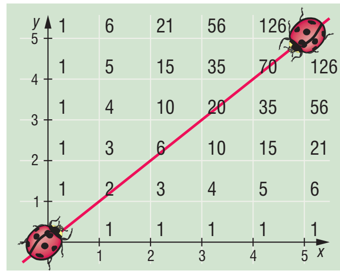
$$P = \frac{14}{252} \approx 0{,}0556.$$

c) Az $y = x$ egyenesre szimmetrikus az előző és ez az eset, így valószínűségeik is egyenlők.

d) Észrevehetjük, hogy *b)* és *c)* esetekben éppen a kérdezett esemény komplementerét számoltuk össze. Ezért:

$$P=\frac{252-(14+14)}{252}=1-2\cdot\frac{14}{252}\approx 0{,}889.$$

Megjegyzések: A feladat több általánosítási, bővítési lehetőséget tartalmaz.



Az egyik lehetőség, ha úgy értelmezzük a feladatot, hogy az $y=x$ egyenest csak átlépni nem szabad útközben, hozzáérni igen. Oldjuk meg így is a feladatot!

Másik lehetőség, ha nem az (5; 5), hanem például a (9; 6) pontba tart a katica. Természetesen ekkor az $y=\frac{2}{3}\cdot x$ egyenes alatti és feletti részeket kérdezzük. Vigyázzunk, ekkor már nem lesz szimmetrikus az egyenes alatti és feletti lépegetés!

Akár azon is gondolkodhatunk, hogy az általában $(n; k)$ pontba tartó katicabogárra feltett hasonló kérdéseket hogyan válaszolhatnánk meg. Mi lenne ekkor a vízválasztó egyenes?

Az összes eseteknél kapott ábrát figyelmesen szemlélve, esetleg ismerős alakzatot fedezhetünk fel a számok rengetegében. 135°-ban, negatív irányban elfordítva *Pascal-háromszöget* kapunk. Jobban belegondolva, teljesen egyértelmű, hogy ezt kell látnunk, hiszen kétoldalt 1-esek állnak, a közöttük levő számokat pedig a háromszög képzési szabályának megfelelően állítjuk elő.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

2799 A kockákat különböztessük meg, és tegyük sorba (pl. sorszámozzuk őket). Két megoldást is adunk az egyes lehetőségekre:

Pár, I. megoldás. Az egy párt tekinthetjük úgy, hogy kettő azonos és három azonos. Az utóbbiak a feladat szempontjából egy csoportot alkotnak „különbözőségükben". Talán furcsán hangzik, de nézzük tovább: szabad hely négy van, ugyanis csak a második ismétlődő helye rögzített. Az első szabad helyre 6, a másodikra 5, aztán 4 és végül 3 lehetőségünk van, egy rögzített. A pár valószínűsége:

$$P_{\text{pár}}=\frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5}\approx 0{,}463.$$

Pár, II. (III.) megoldás. Írjuk össze, hány lehetőség van a pár kialakítására. A kockák sorszámaival adjuk meg az azonos értéket mutatókat: (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5), (4; 5).

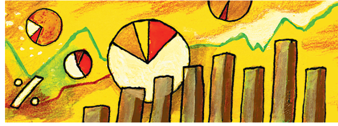
Még jobban látszik, ha táblázatba gyűjtjük az azonosakat.

1. kocka	x	x	x	x						
2. kocka	x				x	x	x			
3. kocka		x			x			x	x	
4. kocka			x			x		x		x
5. kocka				x			x		x	x

Ez tíz lehetőség. Az első kockán 6-félét, utána a szabad helyeken 5-, 4-, 3-félét dobhatunk. A második x helyén viszont csak egyet, hiszen annak meg kell egyeznie az első x-szel.

Természetesen az eredmény nem változik:

$$P_{\text{pár}}=\frac{10\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5}\approx 0{,}463.$$



Drill, I. megoldás. A helyzet nem változik a párhoz képest, csak itt három és két egyformát keresünk (az utóbbi kettő játssza a különböző számok szerepét). Illetve annyiban változik, hogy – mivel a szabad helyek száma eggyel csökken – $6\cdot5\cdot4$-gyel szorozzuk:

$$P_{\text{drill}}=\frac{\frac{5!}{3!\cdot2!}\cdot6\cdot5\cdot4}{6^5}\approx0{,}154.$$

Drill, II. megoldás. Alkalmazzuk a pár második megoldásánál bemutatott táblázatot, ezzel ismét 10 lehetőségig jutunk. Most azonban az x-ek jelentik a különböző számokat, az üres helyeken vannak az azonos dobások. Mivel eggyel kevesebb szabad helyünk van, ezért a szorzótényező végéről lemarad a hármas:

$$P_{\text{drill}}=\frac{10\cdot6\cdot5\cdot4}{6^5}\approx0{,}154.$$

Full, I. megoldás. Itt már tényleg kettő és három azonos értéket kell sorba raknunk. Azonban csak két szabad helyünk van (a többit meghatározzák), így:

$$P_{\text{full}}=\frac{\frac{5!}{3!\cdot2!}\cdot6\cdot5}{6^5}\approx0{,}0386.$$

Full, II. megoldás. Bármilyen furcsa, táblázatunk még mindig a korábban látott, csak képzeljünk az üres helyekre például y-t. Így:

$$P_{\text{full}}=\frac{10\cdot6\cdot5}{6^5}\approx0{,}0386.$$

Két pár, I. megoldás. Ebben az esetben kettő-kettő azonos, és egy ezektől is különböző dobásunk van, sorrendjükre $\frac{5!}{2!\cdot2!\cdot1!}$-t kapunk. Azonban a sorrendek között nem számít különbözőnek, ha a két pár szerepét felcseréljük (5-5-6-6-2 ugyanaz, mint 6-6-5-5-2), így ezt még $2!$-sal osztani kell. A három szabad helyre $6\cdot5\cdot4$-félét dobhatunk. A keresett valószínűség:

$$P_{\text{két pár}}=\frac{\frac{\frac{5!}{2!\cdot2!\cdot1!}}{2!}\cdot6\cdot5\cdot4}{6^5}\approx0{,}231.$$

Két pár, II. megoldás. Vegyük a korábbi táblázatot, csak most x-x és y-y jelölje a két párt.

1. kocka	x	x	x	x	x	x				
2. kocka	x	x	x	y	y					
3. kocka	y	y		x	x	x	…			
4. kocka	y		y	y		y				
5. kocka		y	y		y	y				

Láthatjuk, hogy a párhoz képest minden x-x eset háromszor fordul elő az y-ok elhelyezkedése miatt. Így nem 10, hanem 30 lehetőségünk lesz a párok helyét kijelölni. Azonban x és y szerepe is felcserélhető (végeredményben nem megkülönböztetjük meg az x-x-z-y-y és y-y-z-x-x dobásokat), ezért 2-vel osztanunk kell a lehetséges sorrendek számát, ami 15. A szabad helyek száma eggyel csökkent a párhoz képest ($6\cdot5\cdot4$). A keresett valószínűség:

$$P_{\text{két pár}}=\frac{15\cdot6\cdot5\cdot4}{6^5}\approx0{,}231.$$

Végül álljon itt a kérdésre adandó válasz: pár, két pár, drill, full.

2800 *a)* Eredetileg annak az esélye, hogy Balázs felel:

$$P_1 = \frac{1}{30} \approx 0{,}0333.$$

A strigula után a szoftver úgy veszi, mintha Balláb úr kétszer lenne a naplóba írva. Ezzel eggyel növekszik az összes esetek és eggyel a „kedvező” esetek száma is:

$$P_2 = \frac{2}{31} \approx 0{,}0645.$$

A növekedési szorzó a kettő hányadosa, $\frac{60}{31} \approx 1{,}935$-szeres. Százalékban kifejezve a növekedés 93,5%-os, illetve egy strigula (feltéve, hogy a többieknek még nincs ilyen) után a felelés valószínűsége 93,5%-kal nagyobb.

b) Tegyük fel, hogy Balázsnak n strigulája van (a többieknek még nincs). Ekkor a felelés valószínűsége:

$$P = \frac{1+n}{30+n}.$$

A következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán:

$$\frac{1+n}{30+n} > 0{,}5.$$

Innen:

$$n > 28.$$

c) Legyen Balázsnak n, Borisznak m strigulája (másnak nincs, n, m pozitív egészek). Ekkor:

$$P_{\text{Balázs}} = \frac{1+n}{30+n+m}, \quad P_{\text{Borisz}} = \frac{1+m}{30+n+m}.$$

A feltétel szerint azt akarjuk, hogy:

$$\frac{1+n}{30+n+m} > 0{,}2 \quad \text{és} \quad \frac{1+m}{30+n+m} > 0{,}3.$$

Átalakítva mindkét egyenlőtlenséget és megszabadulva a tizedes törtektől, ezt kapjuk:

$$4n - m > 25 \quad \text{és} \quad 7m - 3n > 80.$$

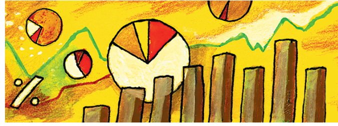
Mit kezdhetünk két egyenlőtlenséggel? Alapvetően két választási lehetőségünk van: próbálkozunk vagy rajzolunk. Kezdjük a próbálkozással! Segít, ha m-et két n-es kifejezés közé szorítjuk:

$$4n - 25 > m > \frac{80+3n}{7}.$$

Az első egyenlőtlenség miatt $n > 6$. Azonban $n = 7, 8, 9, 10$-re sem kapunk megfelelő megoldást, mert a harmadik kifejezés nem kisebb az elsőnél. Végre $n = 11$-re megkapjuk az első két megoldást, $m = 17$ és 18. Készítsünk egy kis táblázatot a lehetséges n, m párokról. Az adott n-hez megtalált összes m értéket nem soroljuk fel, csak a legkisebbet és a legnagyobbat.

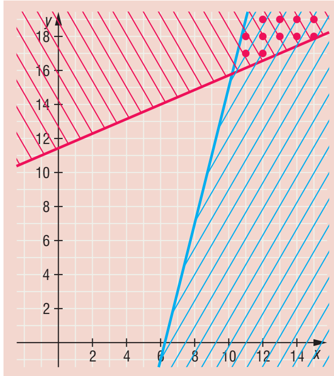
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
$m_{\text{min.}}$	17	17	18	18	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22	23	23	24	24	24	…
$m_{\text{max.}}$	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	

Ennyi felírásból már megfogalmazhatunk két szabályszerűséget is: ha n egyesével növekszik, akkor $m_{\text{min.}}$ váltakozva 3-2-2-es csoportokban teszi ugyanezt, $m_{\text{max.}}$ pedig n minden ugrását négyesével követi.



A másik lehetőség, ha külön-külön a két egyenlőtlenségre mint két lineáris függvényre gondolunk, és ábrázoljuk őket a koordináta-rendszerben (n helyére x kerül, m szerepét pedig y veszi át).

$$y = 4x - 25 \quad \text{és} \quad y = \frac{3}{7} \cdot x + \frac{80}{7}.$$



Satírozzuk be az egyenlőtlenségeknek megfelelő tartományokat. Mivel n és m csak egész értékek lehetnek, a közös részben található egész koordinátájú pontok, az ún. *rácspontok* adják a megoldást.

Akárhogyan is oldjuk meg a feladatot, végtelen sok megoldást kapunk Balázs és Borisz strigulái számára, a megadott határokon belül.

Megjegyzés: Oldjuk meg úgy is a feladatot, ha azt keressük, hogy mikor kisebb a fiúk felelésének valószínűsége a megadott 0,2 és 0,3 értékeknél.

d) Jelölje N a Jolán osztálytársainak kiosztott strigulákat. Ekkor az ő felelésének valószínűsége:

$$P = \frac{1}{30 + N}.$$

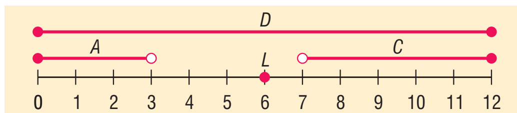
Ezt szeretnénk 0,01 alá csökkenteni:

$$\frac{1}{30 + N} < 0{,}01.$$

Egyszerű átalakításokkal: $N > 70$.

Vegyes feladatok – megoldások

2801 *a)* és *b)* esetén a számegyenes és a megadott események ábrázolása a rajzon látható.



c) Biztos esemény: D, lehetetlen esemény: B.

2802 *a)* Hatos dobások száma: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

b) A dobott számok összege: $\{5; 6; 7; \ldots, 30\}$.

c) A: lehetetlen (hatos), B: biztos (mindkettő), C: lehetetlen (dobott összeg), D: biztos (hatos).

2803 *a)* C és D.

b) $\overline{A} = \{$legalább 16-ot dobunk$\}$; $\overline{B} = \{$páratlant dobunk$\}$; $\overline{C} = \{$prímet vagy 1-est dobunk$\}$; $\overline{D} = \{$összetett számot vagy 1-est dobunk$\}$.

c) $A + \overline{D} = \{1; 2; 3; \ldots; 14; 15; 16; 18; 20\}$;

$\overline{A} \cdot B \cdot C = \{16; 18; 20\}$;

$\overline{B + C} = \{1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$.

d) $\overline{C} \cdot \overline{D} = \overline{C + D}$.

2804 *a)* Bármely kettő kizárja egymást.

b) $\overline{A \cdot B \cdot C} =$ biztos esemény; $A \cdot B + C = C$; $A \cdot (B + C) =$ lehetetlen esemény.

c) A pirossal jelölt esemény $= \overline{A + B + C}$.

2805 –

2806 *a)* 3 éve: 0,17; 2 éve: 0,19; tavaly: 0,18; *b)* még 64-et.

2807 $\frac{8}{20} = 0,4.$

2808 $\frac{5}{45} = 0,\dot{1}.$

2809 $\frac{3!}{5!} = 0,05.$

2810 *a)* $\frac{29}{134} \approx 0,216;$ *b)* $\frac{29 \cdot 28}{134 \cdot 133} \approx 0,04556;$ *c)* $\frac{29^2}{134^2} \approx 0,0468.$

2811 *a)* 1; *b)* $\frac{10}{35} \approx 0,29.$

2812 *a)* $\frac{1}{6} \approx 0,167;$ *b)* $\frac{5 \cdot 1}{6^2} \approx 0,1389;$ *c)* $\frac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n}.$

2813 *a)* $\frac{2}{25} = 0,08;$ *b)* $\frac{51}{54} \approx 0,944.$

2814 *a)* $1 - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 0,5;$ *b)* $\frac{6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \approx 0,000198.$